Московский государственный университет
Экономический факультет
Эконометрика-II
2005

Лукаш Е.Н.

Решение домашней работы 2

Вопрос 1

Посчитать коэффициент автокорреляции первого порядка для ряда 1, 2, 4, 8, 10.

Ответ

Основная формула для расчета *эмпирического* коэффициента автокорреляции k-го порядка для ряда $\{y_t\}$, $t = 1, \ldots, T$, имеет вид

$$r_k = \frac{\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2},$$

где $\bar{y} = (1/T)\sum_{t=1}^{T} y_t$. В нашем случае $\bar{y} = 5$, тогда $r_1 = 9/16$.

Примечание. На практике при подсчёте автоковариации чаще всего используют не $T - k$, а T в знаменателе. При больших размерах выборок различие между формулами незначительно (коэффициент $T/(T-k)$ близок к единице), а, поскольку в теории временны́х рядов асимптотика занимает первое место, впредь можно пользоваться формулой

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2}.$$

Вопрос 2

Коэффициент автокорреляции первого порядка для обратимого процесса скользящего среднего равен $-2/5$. Записать уравнение процесса и график его автокорреляционной функции.

Ответ

Предполагаем, что коэффициенты автокорреляции более высокого порядка равны нулю, тогда оказывается, что имеем дело с процессом $MA(1)$. Для этого процесса

$$\rho_1 = -\frac{\theta}{1+\theta^2},$$

поэтому для отыскания θ нужно решить систему

$$\begin{cases} -\theta/\left(1+\theta^2\right) = -2/5 \\ |\theta| < 1 \end{cases}$$

(неравенство учитывает, что процесс обратимый). В итоге получаем $\theta = 1/2$.

Вопрос 3

Для процесса

$$x_t = 0.5x_{t-1} + 0.25x_{t-2} + \varepsilon_t$$

автокорреляции первого и второго порядка равны, соответственно, 2/3 и 7/12. Найти автокорреляцию 4-го порядка.

Ответ

Поскольку процесс, как легко видеть, стационарен, то автокорреляции можно считать по формуле $\rho_k = 0.5\rho_{k-1} + 0.25\rho_{k-2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho_3 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{11}{24}, \\ \rho_4 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{24} + \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{12} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Вопрос 4

Дисперсия процесса

$$z_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}$$

равна 6. Найти дисперсию белого шума.

Ответ

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= \mathsf{D}z_t = \mathsf{D}\left(\varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-2}\right) = \\ &= \mathsf{D}\varepsilon_t + 0.25\mathsf{D}\varepsilon_{t-1} + 0.25\mathsf{D}\varepsilon_{t-2} = \\ &= 1.5\sigma_\varepsilon^2 = 6,\end{aligned}$$

откуда $\sigma_\varepsilon^2 = 4$.

Вопрос 5

Вывести формулу дисперсии белого шума для процесса $AR(3)$, если известны уравнение процесса и значения автоковариационной функции.

Ответ

Пусть $y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varphi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$. Тогда

$$\sigma_\varepsilon^2 = \mathsf{E}\left(y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2} - \varphi_3 y_{t-3}\right)^2 = \ldots$$

$$\ldots = \left(1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2\right)\gamma_0 + 2\left(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_2\varphi_3\right)\gamma_1 - 2\left(\varphi_2 - \varphi_1\varphi_3\right)\gamma_2 - 2\varphi_3\gamma_3.$$

Вопрос 6

Можно ли сказать, дисперсия какого процесса больше и во сколько раз:

$$\begin{aligned}x_t &= 1.5x_{t-1} + \varepsilon_t, \\ y_t &= 1.4y_{t-1} + \delta_t?\end{aligned}$$

Ответ

Нет. Оба процесса нестационарны и $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = +\infty$.

Вопрос 7

Изобразить график автокорреляционной функции процесса

$$z_t + 0.1z_{t-1} + 0.5z_{t-2} = \varepsilon_t.$$

Ответ

В прошлой домашней работе было показано, что автокорреляционная функция любого стационарного процесса $AR\,(2)$ может быть представлена в виде

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k, \tag{1}$$

где G_i — числа, обратные корням характеристического уравнения, A_i — некоторые константы. Если оба корня вещественны, ρ_k будет затухающей экспонентой. В случае комплексных корней можно показать, что ρ_k имеет вид затухающей синусоиды:

$$\rho_k = d^k \frac{\sin\left(k\alpha + \beta\right)}{\sin\beta},$$

где константы вычисляются по следующему алгоритму. Пусть φ_1 и φ_2 — параметры процесса, тогда:

1. $d = \sqrt{-\varphi_2}$,
2. $\alpha = \arccos\left[\varphi_1 / \left(2d\right)\right]$,
3. $\beta = \arctan\left[\left(\left(1+d^2\right) / \left(1-d^2\right)\right)\tan\alpha\right]$.

В нашем случае получаем $\rho_k = \left(0.71\right)^k \sin\left(1.5k + 1.547\right)$.

Вопрос 8

Корни характеристического уравнения для процесса $AR(2)$ равны ± 5. Изобразить график автокорреляционной функции.

Ответ

Пользуясь формулой (1) и тем, что в данном симметричном случае $A_1 = A_2 = 1/2$, $G_1 = 1/5 = -G_2$, получаем

$$\rho_k = \frac{1}{2}\left(G_1^k + \left(-G_1\right)^k\right) = \begin{cases} G_1^k, & k \text{ — чётное,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$